1.3 *De produktregel*

Eerder heb je geleerd dat je de *som* van twee (of meer) functies kunt differentiëren, door *termsgewijs* te differentiëren.
Bijvoorbeeld:

$$\frac{d}{dx}[x^2 + x^3] = 2x + 3x^2$$

1.7 Een dergelijke mooie regel geldt niet voor produkten van functies. Bij een produkt mag je **niet** factorsgewijs differentiëren.

Laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{d}{dx}[x^2 \cdot x^3]$ niet gelijk is aan $2x \cdot 3x^2$

Om te komen tot een regel voor het differentiëren van een produkt van twee (of meer) functies, kijken we eerst in drie opgaven hoe een produkt verandert als de beide factoren veranderen.

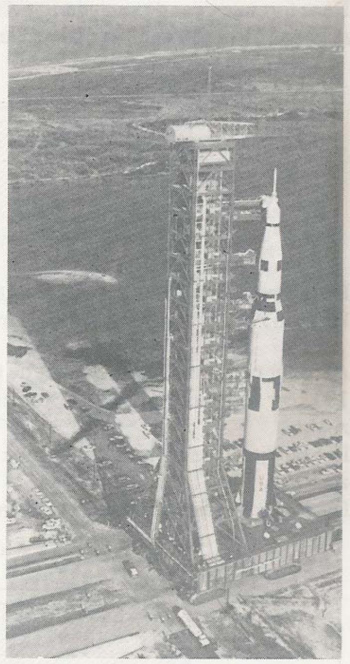
1.8 De gemiddelde afmetingen van een voetbalveld zijn 60 bij 100 m.
In een zeker land heeft de voetbalbond bepaald dat zowel de lengte als de breedte niet meer dan 5% hiervan mogen afwijken.
Hoeveel procent wijkt de oppervlakte maximaal af van de gemiddelde oppervlakte?

1.9 Lancering van de Saturnus V-raket. Een wet uit de natuurkunde zegt dat de voortstuwingskracht (=F) gelijk is aan het produkt van de massa (=m) en de versnelling(=a). In formule: $F = m \cdot a$

Door brandstofgebruik neemt de massa van de raket af: m is een dalende functie van de tijd t. Ook F en a zijn functies van t. Aanvankelijk zullen F en a toenemen, maar later als gevolg van het opraken van de brandstof weer afnemen.

a Veronderstel dat in een zeker tijdsinterval de massa afneemt met 2% en de versnelling met 1%. Met hoeveel procent is de voortstuwingskracht afgenomen?

b Veronderstel dat de massa verandert met Δm en de versnelling met Δa. Toon aan:
$\Delta F = \Delta m \cdot a + m \cdot \Delta a + \Delta m \cdot \Delta a$



Met de SaturnusV werden zes bemande Apollo-vluchten naar de maan uitgevoerd. Op de foto hierboven wordt een SaturnusV-raket naar het lanceerplatform gereden

1.10 De verkoop van sportschoenen van het type Superrunner is afhankelijk van de prijs. Gaat de prijs omlaag(omhoog), dan zal de verkoop stijgen (dalen).

Stel p = de prijs van een paar Superrunners en N = het door een warenhuisconcern verkochte aantal per week.

De omzet per week is:

$R = N \cdot p$

a Veronderstel dat de prijs stijgt met 5% en de verkoop daalt met 2%. Met hoeveel procent verandert de omzet?

b Bij een verandering Δp van de prijs en een verandering ΔN van de verkoop hoort een verandering ΔR van de omzet.

Toon aan: $\Delta R = \Delta N \cdot p + N \cdot \Delta p + \Delta N \cdot \Delta p$

Nu komen we tot de produktregel.

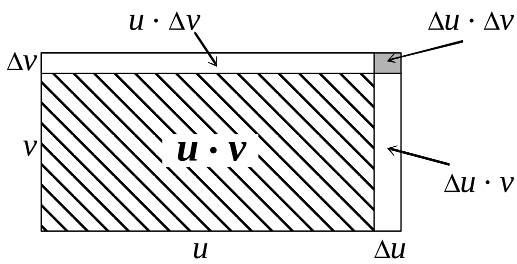
Stel u en v zijn functies van x en stel $y = u \cdot v$

Bij een verandering Δx van x horen veranderingen $\Delta u, \Delta v$ (en Δy).

Er geldt:

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v \qquad \textbf{(1)}$$

Deze formule voor de verandering van een produkt kun je bij positieve waarden van u, v, Δu , Δy , mooi 'zien' in onderstaand plaatje:



De termen $u \cdot \Delta v$ en $\Delta u \cdot v$ zijn de witte staafjes in de figuur.

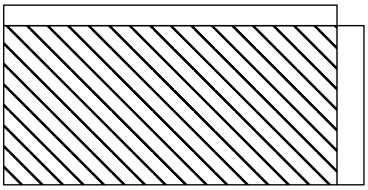
De term $\Delta u \cdot \Delta v$ is het grijze blokje in de hoek.

Als door verkleining van Δx , de toename Δu en Δv beide bijvoorbeeld ongeveer 100 keer zo klein worden, dan worden de staafjes $u \cdot \Delta v$ en $v \cdot \Delta u$ ongeveer 100 keer zo dun.

Het blokje $\Delta u \cdot \Delta v$ wordt dan in twee richtingen verkleind en ongeveer 10.000 keer zo klein!

Daarom mag in de formule **(1)** de term $\Delta u \cdot \Delta v$ worden verwaarloosd en komt er:

$$\Delta y \approx \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v \qquad \textbf{(2)}$$



Na deling, links en rechts door Δx komt er:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad \textbf{(3)}$$

De benadering is nauwkeuriger naarmate Δx kleiner is.

Kortom: $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \textbf{(4)}$$

Bij het differentiëren van een produkt $u \cdot v$ worden beide factoren u en v dus wèl gedifferentieerd, maar niét gelijktijdig. Je kunt de produktregel ook in deze vorm onthouden:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{u'(x)}_{\text{eerste factor gedifferentieerd}} \cdot v(x) + u(x) \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{tweede factor gedifferentieerd}}$$

1.11 Bereken $\dfrac{dy}{dx}$ voor:

a $y = 3 \cdot \sin x$

b $y = 5 \cdot \sin x$

c $y = 8\frac{1}{2} \cdot \sin x$

d $y = 7x^2 \cdot (\frac{1}{4}x^2 + 17)$

e $y = 7x^2 \cdot \sin x$

f $y = (2 + 3x) \cdot (4 - 5x + 6x^2)$

1.12 $u(x) = 5x^2 + 1$; $v(x) = 4x^3 + 1$; $p(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bereken op twee manieren $p'(x)$:

a met behulp van de somregel;

b met behulp van de produktregel.

1.13 a bereken $\dfrac{d}{dx}[(x^2 + 2x + 3)^2]$ voor $x = 1$

b Bereken $\dfrac{d}{dx}[\sin^2 x]$ voor $x = \frac{1}{4}\pi$

c Bereken $\dfrac{d}{dx}[(x - \sin x)^2]$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$

1.14 Je weet al dat:

$$\frac{d}{dx}[\sin(ax)] = a \cdot \cos ax \text{ en}$$

$$\frac{d}{dx}[\cos(ax)] = -a \cdot \sin ax$$

Bereken: $\frac{d}{dx}[\sin 2x \cdot \cos 3x]$ voor $x = \frac{1}{6}\pi$

Neem onderstaande tabel over en vul in (vereenvoudig waar mogelijk):

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
$\cos x$	….
$x^2 + \cos x$	….
$x^2 - \cos x$	….
$x \cdot \sin x$	….
$x^2 + x \sin x$	….
$(x^2 + x)\sin x$	….

De produktregel kan worden uitgebreid voor een produkt van meer dan twee functies.
In schema:

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

eerste functie differentiëren

tweede functie differentiëren

derde functie differentiëren

1.15 Je kunt bovenstaande regel vinden door twee keer de produktregel van twee functies toe te passen. Laat dit zien.

1.16 a Bereken de hellingfunctie van: $p(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$

b Ook van: $p(x) = x \sin x \cos x$

c En ook van: $p(x) = \cos^3 x$

1.17 Hoe luidt de produktregel voor een produkt van 4 functies, zeg $y = a(x) \cdot b(x) \cdot c(x) \cdot d(x)$?

1.18 De grafiek van de functie $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ snijdt de x-as in 4 punten.

a Bereken de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in elk van die 4 punten.

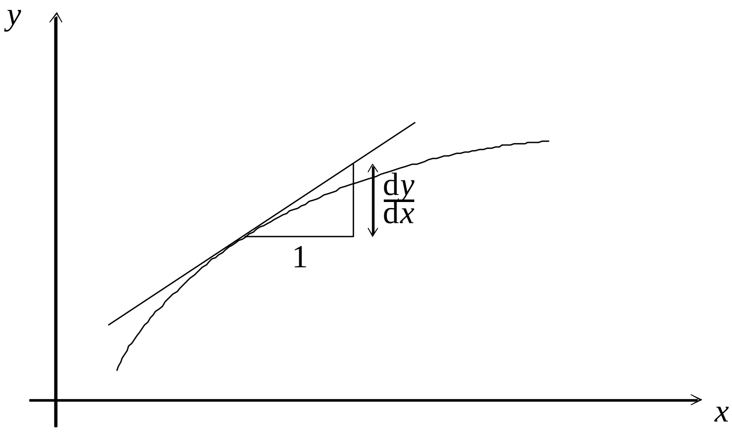
b Als je opgave a goed hebt uitgerekend, vind je afwisselend een negatieve en een positieve hellingscoëfficiënt.
Licht dat toe door een ruwe schets van de grafiek van *f* te maken.

c Hoeveel oplossingen zal $f'(x) = 0$ hebben?

1.19 Gegeven: $f(x) = (2x+1)^4$.
Bereken $f'(-1)$

1.3.1 Terugblik

$\boxed{f'(x)}$ = $\boxed{\textit{hc}\text{ grafiek } f \text{ in } (x,y)}$ = $\boxed{\textit{hc}\text{ raaklijn in } (x,y)}$ = $\boxed{\frac{dy}{dx}}$



$\frac{dy}{dx}$ (in een zeker punt) wordt *exact berekend* met behulp van de afgeleide functie (en invullen van de x-coördinaat).

$\frac{dy}{dx}$ (in een zeker punt) wordt *benaderd* door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ te berekenen in een klein interval (om dat punt).

Produktregel

Laat *u, v, w* functies zijn van *x*.
Voor het differentiëren van de produkten $u \cdot v$ en $u \cdot v \cdot w$ gelden de regels:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)] = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

Kortweg:
$(uv)' = u'v + uv'$
$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

1.3.2 Opgaven

a. $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)$ $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)$

Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

b. $f(x) = (1-x)\sin x + (1+x)\cos x$.

Laat zien dat geldt: $f'(x) = (2-x)\cos x - (2+x)\sin x$